Сандар теориясының негіздері. Сандардың бөлінгіштік белгілері. Жай сандар. ЕҮКОБ, ЕКОЕ. Евклид алгоритмі. Арифметиканың негізгі теоремасы

Курс оқу дәріс және көптеген есептер шығаруға арналған практиқалық сабақтар түрінде құрылған.

Негізгі мақсат: оқушылардың математикалық сезіну, логикалық және аналитикалық ойлауға, кеңістік бейнелерді елестету құзіреттілігін қалыптастыру мен дамыту.

Міндеті:

- дарынды балаларды шығармашыққа ынталандыру;
- дарынды балардың ғылыми – зерттеу және шығармашылық іздену қабілетінің қалыптасуына жағдай жасау.
- оқушылардың математикалық әдебиетпен жұмыс жасау дағдылараpын қалыптастыру.

Бағдарлама қазіргі заман ғылымы мен техника есептерін шеше білу мамандарын даярлауға бағытталған.

Курсты оқу нәтижесінде:

<u>*Білу қажет*</u>:

1. Олимпиада есептерін шешудің алгебралық әдістерін;
2. Олимпиада есептерін шешудің геометриялық әдістерін;

Істей білу қажет:

- Олимпиада есептерін шешу кезінде неғұрлым ұтымды әдістерді таңдай білу және қолдана білу;
- Олимпиада есептерін талдау және шешім табу жолын негіздеу.

Арнайы формуланы қолдануға келмейтін әрқайсысына өзінше талдау жасауды қажет ететін есептерді логикалық есептер дейміз.

Олимпиадалық есептердің саны да, шығару да тәсілдері де алуан түрлі. Математика ғылымында логикалық есептер бірнеше түрге бөлінеді:

1. Логикалық және мәтін есептер шешу әдістемесі;
2. Мүмкіндіктер есебі немесе комбинаторика;
3. Дирихле принципін қолдану;
4. Ең кіші, ең үлкен мүмкін мәндер табу;
5. Математикалық сауаттылық негіздері;
6. Геометриялық салу есептері;
7. Шеңбер қасиеттерін қолдану;
8. Сандар теориясы элементтері;
9. Рекурентті қатынасты қолдану;
10. Теңсіздік дәлелдеу.

Основная теорема арифметики: Всякое натуральное число n единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произведение степеней простых сомножителей:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} \qquad (*)$$

Признаки делимости:

- на «2» – (если число оканчивается чётной цифрой);
- на «3» – (если сумма цифр числа делится на 3);
- на «4» – (если две последние цифры в записи числа образуют двузначное число, кратное 4);
- на «5» – (если число оканчивается 0 или 5);
- на «8» – (если три последние цифры в записи числа образуют трёхзначное число, кратное 8);
- на «9» – (если сумма цифр числа делится на 9);
- на «10» – (если число оканчивается 0).

И ещё вопрос: что такое n! и как найти значения 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, … Посмотрите, как изменяется последняя цифра числа n!

n! - n – произведение первых n натуральных чисел.

При $n \geq 5$ число n! всегда оканчивается нулём.

Признаки делимости на 2^n, 5^n, 10^n, $10^n - 1$, $10^n + 1$

Признак делимости на 2^n

Число делится на n-ю степень двойки тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на ту же степень. (n>0)

Признак делимости на 5^n

Число делится на n-ю степень пятёрки тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на ту ж е степень. (n>0)

Признак делимости на 10^n-1

Разобьем число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдем сумму этих групп, считая их n-значными числами. Эта сумма делится на $10n - 1$ тогда и только тогда, когда само число делится на $10n - 1$.

Признак делимости на 10^n

Число делится на n-ю степень десятки тогда и только тогда, когда n его последних цифр - нули.

Признак делимости на 10^n+1

Разобьем число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдем сумму этих групп с переменными знаками, считая их n-значными числами. Эта сумма делится на 10n+1 тогда и только тогда, когда само число делится на 10^n +1.

Логические задачи относительно чисел

1. Установите закономерность и продолжите ряд чисел

101, 112, 131, 415, 161, 718 ...

Решение.1-способ. Если к каждому числу находящемуся на не четных позициях прибавлять 30, а на четных 303, получим:

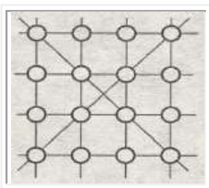
3: 101+30=131;
5: 131+30=161;
7: 161+30=**191.**
9: 191+30=**221.**
чет.
4: 112+303=415;
6: 415+303=718;
8: 718+303=**1021.**
……………………..

2. Имеется ряд чисел: 77, 49, 36 ... Какое число следующее в этом ряду?

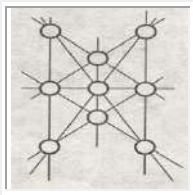
Решение. Следующее число 3·6=**18.** Каждое следующее число в этом ряду представляет собой произведение двух цифр, входящих в предыдущее число в последовательности.

Поэтому после 18 будут идти одни восьмерки.

3. На рисунке ниже показано, как можно расположить 16 монет по 4шт. в каждом из 10 рядов (4 вертикальных, 4 горизонтальных и 2 диагональных). А как можно расположить 9 монет в 10 рядах по 3 шт. в каждом ряду?



Ответ:



4. Запишите недостающее число: **5, 11, 23, ? , 95, 191.**

Решение. $5 \xrightarrow{+6} 11 \xrightarrow{+12} 23 \xrightarrow{+24} 47 \xrightarrow{+48} 95 \xrightarrow{+96} 191$. *Ответ*: 47.

5. Выразите число 100 пятью одинаковыми цифрами. Предложите четыре способа решения.

Решение:.

111 - 11 = 100;

$33\cdot 3 + 3/3 = 100$;

$5\cdot 5\cdot 5 – 5\cdot 5= 100$;

$(5 -5 + 5 + 5)\cdot 5 = 100$.

6. Как число 66 увеличить в полтора раза, не проводя над ним никаких арифметических действий?

Решение. Сделать поворот на 180^0.

7. Преподаватели 6, 7 и 8 классов выстраивали детей на линейку. Когда детей попытались выстроить в четыре ряда, то осталось три бесхозных ребенка; когда выстраивали их по пять, оставалось – четыре; выстроив по шесть, остались – пять; и только, когда преподаватели додумались расставить их по семь, им это удалось. Сколько школьников получит наряд за опоздание на линейку, если известно, что в 6, 7 и 8 классах 150 учеников?

Решение. Число детей, пришедших на линейку кратно 7, но не кратно 4, 5, 6. Проверяем числа, удовлетворяющие этим условиям и меньшие 150. Таких чисел: 7, 14, 21, 49, 63, 77, 91, 98, 119, 133, 147 (числа находим, умножая последовательно 7 на числа не кратные 4, 5, 6). Проверив, какие остатки остаются при делении на 4, 5, 6 находим, что на линейке было 119 детей. Значит, наряд за опоздание на линейку получит 31 ученик. *Ответ:* 31 ученик.

8. Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8, то избыток (равен) 3. Если (каждый) человек внесет по 7, то недостаток (равен) 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

Решение. Пусть было x людей. Тогда стоимость вещи равна 8x -3 или 7x+4.

Решим уравнение: 8x-3=7x+4, x=7.

8(7–3=53. Было 7 человек, а стоимость вещи равна 53.*Ответ:* 7 человек, стоимость равна 53.

9. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Раскладываем делитель - число 12 на простые множители. 12 = 3×4=3×2×2. Следовательно, заданное число после вычеркивания чисел должно делиться на 3 и 4 или на 2, еще раз на 2 и, наконец, на 3.На 2 делятся чётные числа, поэтому 1 в конце вычеркиваем сразу. Останется 18161512.Но нам нужно, чтобы оно делилось на 2 дважды, т.е. делилось на 4. Признак делимости на 4 утверждает, что для этого на 4 должно делиться двузначное число, образованное последними двумя цифрами. 12**:**4 = 3, поэтому две последние цифры числа 18161512 вычеркивать нельзя. Они гарантируют делимость числа на 4 (на обе двойки).Чтобы число делилось на 3, нужно чтобы на 3 делилась сумма его цифр.1+8+1+6+1+5+1+2=25, 25=3×8+1 - можно вычеркнуть одну из единиц, но по условию задачи нужно вычеркнуть еще две цифры;25=3×7+4 - нет двух цифр для вычеркивания, сумма которых равнялась бы 4, т.к. последние цифры 1 и 2 трогать нельзя;25=3×6+7 - сумма двух вычеркнутых цифр будет равна 7, если вычеркнуть 6-ку и любую из единиц, кроме последней. Итак, возможные ответы: 811512 или 181512. Выбираем один из них, например: *Ответ:*181512.

10. Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 2277. Приведите ровно один пример такого числа.

Решение. Число, кратное 5, оканчивается цифрами 0 или 5. Тогда число, записанное в обратном порядке, должно начинаться с 0 или с 5. Если число начинается с 0, то оно уже не будет четырёхзначным, а станет трёхзначным, так как 0 в начале обычно не пишут.

Например, 0348 это просто 348. Значит искомое число заканчивается цифрой 5. Остальные его цифры обозначим буквами a,b,c. Само число в таком случае обозначается $\overline{abc5}$. Черта вверху здесь нужна для того, чтобы не путать это обозначение с алгебраическим произведением переменных (a умножить на b, умножить на c ...). Число записанное в обратном порядке обозначается $\overline{5cba}$.

По условию

$$\overline{abc5} - \overline{5cba} = 2277.$$

$$1)\ \frac{-\begin{array}{r}abc5\\5cba\end{array}}{2277} \qquad 2)\ \frac{-\begin{array}{r}8bc5\\5cb8\end{array}}{2277} \qquad 3)\ \frac{-\begin{array}{r}8195\\5918\end{array}}{2277}$$

Представим себе, что мы выполняем это вычитание в столбик.

1) 5 меньше 7, значит при вычитании приходилось занимать десяток. $10+5-a=7$. $a=15-7=8$.

2) При вычитании десятков не так очевидно, занимали или не занимали единицу в разряде сотен. Сначала допустим, что не занимали. Тогда из уменьшенного на единицу числа c вычитали b и получили 7. $(c-1)-b=7$. $c=8+b$. Такому варианту подходят $b=0$ и $b=1$.

Большие значения b увеличат c до двузначного числа. Возьмём к примеру $b=1$, тогда $c=9$, и проверкой убеждаемся в том , что число 8195 удовлетворяет условию задачи. *Ответ:* 8195.

<u>Решение задач на делимость</u>

Пример 1. В шестизначном числе 1-я цифра совпадает с 4-й, 2-я с 5-й, 3-я с 6-й. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

Решение. Обозначим 1 цифру – а, 2 – в, 3 – с , тогда число

авсавс = 100000а + 10000в + 1000с + 100а + 10в + с =

=1000(100а + 10в + с) + авс = 1000авс + авс = 1001авс = 11·7·13авс кратно 7,11,13.

Пример 2. Доказать, что трехчлен $y=x^2+5x+16$ ни при каком целом х не делится на 169.

Решение Рассмотрим трехчлен $x^2+5x+16$, выделим квадрат двучлена: $x^2+5x+16=x^2-2x\cdot4+4^2+2x\cdot4+5x=(x-4)^2+8x+5x=(x-4)^2+13x$. Сумма $(x-4)^2+13x$, а значит и трехчлен $x^2+5x+16$ делится на 169 только при условии, что каждое слагаемое делится на 169. Выражение $(x-4)^2$ делится на 169 при условии, что $x-4$ делится на 13, но $x-4$ делится на 13 при $x=13n+4$, $n\in Z$.

Проверим, делится ли слагаемое 13х на 169 при $x=13n+4$. 13х делится на 169 при условии, что х делится на 13, но $x=13n+4$ и это число ни при каком $n\in Z$ не делится на 13. Значит, исходный трехчлен $x^2+5x+16$ ни при каком х не делится на 169.

Пример 3. Доказать, что 17^n-11^n делится на 6 при любом натуральном n.

Решение. Достаточно разложит на множители выражения:

$$17^n-11^n=(17-11)(17^{n-1}+17^{n-2}\cdot11+\ldots+11^{n-1}).$$

Пример 4. Доказать, что $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n.

Решение. $3^{2n+1}+2^{n+2}=9^n\cdot3+2^n\cdot4=3(9^n-2^n)+3\cdot2^n\cdot+4\cdot2^n=3(9^n-2^n)+7$. Число 9^n-2^n делится на 7.

Пример 5. Три цифры пятизначного числа – четверки. Найдите это число, зная, что оно делится без остатка на 315.

Решение. Так как 315=5·7· 9, то последняя цифра искомого числа 0 или 5. Если это 0, то одна из его цифр 6 (по признаку делимости на 9), но из чисел 4446, 4464, 4644, 6444 ни одно не делится на 7. Если же последняя цифра 5, то одна из цифр 1. Условию отвечает только число 44415.

Пример 6. Доказать, что число $2^{20}+3^{20}+4^{20}+7^{21}$ кратно 10 .

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 10. Для того чтобы данное выражение делилось на 10, необходимо, чтобы последняя цифра в данном выражении была 0, т. е. сумма единиц всех слагаемых должна оканчиваться нулем. Найдем, какой цифрой оканчивается каждое слагаемое:

$2^{20}=2^{4\cdot5}$ – оканчивается так же, как 2^4 (6); $3^{20}=3^{4\cdot5}$ – оканчивается так же, как 3^4 (1); 4^{20} – оканчивается цифрой 6; $7^{21}=7^{4\cdot5+1}=7^{20}\cdot7$ – оканчивается цифрой 7. Сложим последние цифры (единицы слагаемых): 6+1+6 +7=20. Сумма единиц оканчивается нулем, значит, заданное число кратно 10.

Пример 7.

а) $a+1$ делится на 3. Докажите, что $4+7a$ делится на 3.

б) $2+a$ и $35–b$ делятся на 11. Докажите, что $a+b$ делится на 11.

Решение: Указания: а) $4+7a=4(a+1)+3a$; б)$a+b=(2+a)–(35–b)+33$.

Пример 8. **Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6**.

Решение: Заметим, что это число, увеличенное на 1, делится на 2, 3, 4, 5, 6. *Ответ*: 59.

Пример 9. **Докажите, что если $(n – 1)! + 1$ делится на n, то n – простое число**.

Решение: Если n – составное число ($n > 4$), то $(n – 1)!$ делится на n.

Пример 10. **Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $n+1, n+2, \ldots, n+1989$ – составные.**

Решение: Попробуем рассказать, как можно придти к решению. Число $n+1$ должно быть составным. Попытаемся пойти по самому простому пути: сделаем так, чтобы $n+1$ делилось на 2. $n+2$ также должно быть составным, но делиться на 2 уже не может. Попытаемся опять пойти по самому простому пути: хотелось бы сделать так, чтобы $n+2$ делилось на 3. Продолжая в том же духе, можно пытаться найти число n такое, что $n+1$ делится на 2, $n+2$ – на 3, $n+3$ – на 4 и так далее. Это равносильно тому, что $n–1$ делится на 2, 3, 4, …, 1990. Такое число, конечно, существует – например, 1990!.
Итак, в качестве искомого n можно взять число $1990!+1$.

Пример 11. Число a кратно 6. Докажите, что число a^2-12a кратно 36.

Решение. 1) a кратно 6, значит $a=6m$;

2) $a^2\text{-}12a=(6m)^2\text{-}12\cdot6m=36m^2\text{-}2\cdot6\cdot6m=36m^2\text{-}2\cdot36m=36(m^2\text{-}2m)\,\vdots 36$,т.е. $a^2\text{-}12m$ кратно 36.

Пример 12. **Докажите, что сумма квадрата целого числа и самого числа есть число четное**.

Решение. Пусть n - целое число. $n^2+n=n(n+1)$- произведение 2-х последовательных чисел. Значит одно из них четное, а другое нечетное. Произведение четного и нечетного чисел есть число нечетное.

Пример 13. **Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел. при делении на 4 дает остаток 1**.

Решение. Пусть эти числа $2k$ и $2k+1$. Тогда $(2k)^2+(2k+1)^2=4k^2+4k^2+4k+1=4(2k^2+k)\ +1$, т.е. число делится на 4 и остаток 1.

Пример 14. **Четные числа a и b, не кратные 6, при делении на 6 дают разные остатки. Докажите, что сумма $a+b$ делится на 6**.

Решение. 1) По условию a – четное, значит $a=2n$ и $a=6k+r_1$. Т.к. a - четное, 6k – четное, то и остаток r_1 - четное;

2) Аналогично, b - четное, $b=6p+r_2$, 6p - четное, значит остаток r_2 - четное;

3) При делении на 6 остатки могут быть:1,2,3,4,5. Так как остатки четные, то$r_{1=}2$, $r_2=4$.

4) $a+b= 6k++6p+r_0=6(k+p)+(r_1+r_2)=6(k+p)+6$ – сумма делится на 6.

Пример 15. **Число 137 возвели в сотую степень. Какова последняя цифра десятичной записи результата?**

Решение: Прежде всего, заметим, что последняя цифра натурального числа есть остаток от деления этого числа на 10. Согласно выводу 4 нам достаточно найти остаток от деления на 10 числа 7^{100}, т.к. 1377 (mod10)$137^{100}7^{100}$(mod 7). Но в арифметике сравнений по модулю 10 всякое натуральное число и его последняя цифра находятся в одном классе, поэтому при возведении 7 в степень нам достаточно следить лишь за последней цифрой степени:
$7^1 7$, $7^2 9$, $7^3 7^2 7973$, аналогично $7^4=7^3 7371$, $7^5=7^4 7177$, и дальше вся последовательность 7, 9, 3, 1 будет периодически повторяться (все сравнения здесь даны по модулю 10).
Отсюда видно, что на 4-м, 8-м, 12-м, 16-м и т.д., вообще на любом месте, кратном 4, в этой последовательности стоит 1. Значит, и на сотом месте стоит 1, т.е. 137^{100} оканчивается цифрой 1.

Пример 16. Число 98 возвели в 42 степень. Какова последняя цифра десятичной записи результата?

Решение: Воспользуемся выводом 4 и найдем остаток от деления на 10 числа 98^{42}. $98\equiv8$(mod10), $8\equiv8$, $8^2\equiv4$, $8^3=8^2\cdot8\equiv4\cdot8\equiv2$, $8^4=8^3\cdot8\equiv2\cdot8\equiv6$, $8^5=8^4\cdot8\equiv6\cdot8\equiv8$(mod10). Вся последовательность 8, 4, 2, 6 будет периодически повторяться. Значит $98^{42}=98^{4\cdot10+2}\equiv98^2\equiv8^2\equiv4$(mod10). Значит, последняя цифра десятичной записи результата - 4.

Пример 17. Найдите все простые числа p, для которых число p^2+2 также простое.

Решение. 1) Проверим. Пусть $p=2$. Так как $p^2+2=2^2+2=6$ - составное, то $p\neq2$.

2) Пусть $p=3$. Тогда $p^2+2=11$ - простое число. Покажем теперь, что нет простых чисел $p>3$, для которых p^2+2 - простое число. Пусть $p >3$ - простое число, тогда p не делится на 3, значит по теореме о делении с остатком $p=3n+1$ или $p=3n+2$, где n - натуральное число. Если $p=3n+1$, то $p^2+2=3(3n^2+2n+1)$ делится на 3, т. е. не является простым. Если же $p=3n+2$, то $p^2+2=3(3n^2+4n+2)$ также делится на 3, т.е. не является простым.

Пример 18. В клуб «Миллионеры России» вступили миллион миллионеров. В анкетах они оценили свой капитал от 10 млн. до 10 млрд. рублей (с округлением до одного миллиона). Можно ли утверждать, что найдется более ста миллионеров с одинаковыми «анкетными данными»?

Решение. Можно. В противном случае каждую анкетную сумму (9991 различное значение) имеете не менее 100 миллионеров, то есть всего их не более 999100.

Пример 19. Доказать, что для любого натурального числа n одно из чисел $n(n^2 - 1)$ или $n(n^2 + 1)$ нацело делится на 10.

Решение. Доказательства в решениях задач подобного рода проводятся, преимущественно, с использованием метода математической индукции. Эта задача не исключение. Действительно, для n=1 число $n(n^2 - 1) = 0$, а 0 делится на любое целое число нацело, для n=2 число $n(n^2 + 1) = 10$, для n=3 число $n(n^2 + 1) = 30$, n=4 число $n(n^2 - 1) = 60$, для n=5 и число $n(n^2 - 1) = 120$ и число $n(n^2 + 1) = 130$ делятся нацело на 10. И т.д. Применяя метод математической индукции, следует доказать, что если для некоторого натурального k одно из чисел $k(k^2 + 1)$ или $k(k^2 - 1)$ делится нацело на 10 то одно из чисел

$(k+1)((k+1)^2 + 1)$ или $(k+1)((k+1)^2 - 1)$.

Так как и в условии, и в выводах последнего утверждения присутствуют по два выражения, связанные союзом "или", то его доказательство представляется нам громоздким, ввиду рассмотрения различных возможных вариантов. Поэтому мы проведем доказательство, с помощью анализа возможных вариантов конструкции заданных выражений. Доказательство существенно использует тот очевидный факт, что последняя цифра произведения двух (или нескольких) целых чисел равна последней цифре произведения их последних цифр, а признаком делимости целого числа на 10 является то, что его последняя цифра равна 0.

Итак. для любого целого числа n выражение $n(n^2- 1)$, применив формулу разности квадратов, можно записать в виде $n(n-1)(n+1)$. Последнее выражение является ни чем иным как произведением трех последовательных чисел n-1, n и n+1. Заметим, что среди трех последовательных целых чисел хотя бы одно обязательно окажется четным.

- Среди чисел n-1, n и n+1 одно оканчивается на 0, тогда и их произведение $n(n-1)(n+1)=n(n^2-1)$ оканчивается на 0, т.е. делится нацело на 10. Такую ситуацию имеем если последняя цифра числа n равна 0, или 1 (тогда n-1 имеет последнюю цифру 0), или 9 (тогда n+1 имеет последнюю цифру 0).
- Среди чисел n-1, n и n+1 одно имеет последнюю цифру 5, т.е. делится нацело на 5. Произведение числа, кратного 5 на любое четное число делится нацело на 10.

Так как среди чисел n-1, n и n+1 обязательно присутствует хотя бы одно четное, то произведение $n(n-1)(n+1)=n(n^2-1)$ делится на 10 нацело. Такую ситуацию имеем, если число n оканчивается на 4, 5 или 6.

- В остальных случаях, т.е. когда n имеет последнюю цифру 2, 3, 7 или 8 число $n(n^2 - 1)$ делиться нацело на 10 не будет. В этом случае рассмотрим выражение $n(n^2+1)$. Если последняя цифра числа n равна 3 или 7, то его квадрат оканчивается на 9, тогда n^2+1 имеет последнюю цифру 0 и делится нацело на 10 вместе с произведением $n(n^2+1)$. Если последняя цифра числа n равна 2 или 8, то само n четно, а его квадрат имеет последнюю цифру 4, следовательно последняя цифра числа n^2+1 равна 5 и оно делится нацело на 5. Тогда число $n(n^2 + 1)$ нацело делится на 10 как произведение числа кратного 5 на число кратное 2.

Пример 20. **При каких n число 1111...111**(n единиц) **делится на 7**?

Решение. Будем делить 1111...111 на 7 «уголком». Числа 1, 11, 111, 1111, 11111 не делятся нацело на 7, а $111111=7\cdot15873$. Отсюда следует, что если в записи данного числа больше 6 единиц, то после каждой 6 единицы очередной остаток равен 0. Значить, число вида 1111...111 делится на 7 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6 , т.е. $n=7\cdot t$, где $t\in Z$.

Пример 21. **При каких n число 1111...111** (n единиц) **делится на 99999 999**?

Решение. Число 1111...111 делится на 999999999, если оно делится на 111111111 и на 9 одновременно. В данном числе количество единиц кратно 9. Однако первое и второе такие числа 111111111 и 111111111111111111 не делятся на 999999999. А число, в котором 18 единиц, делится на 999999999. При этом, начиная с 18-го, каждое 18-ое число делится на 999 999 999, т.е. $n=18\cdot t$, где $t\in N$.

Пример 22. Докажите, что значение многочлена n^3+3n^2+5n+3 при любом целом n делится на 3.

Решение. $n^3+3n^2+5n+3=(n^3-n)+3(n^2+2n+1)=n(n^2-1)+3(n+1)^2=n(n-1)(n+1)+3(n+1)^2=(n-1)n(n+1)+3(n+1)^2$. Произведение трех последовательных целых чисел $(n-1)n(n+1)$ делится на 3. Второе слагаемое - число $3(n+1)^2$ - тоже делится на 3, следовательно, и вся сумма делится на 3.

Пример 23. Доказать, что m^5+4m делится на 5 при любом натуральном m.

Решение. Преобразуем исходное выражение следующим способом:

$$m^5+4m=m^5- m+5m=m(m^4-1)+5m=m(m^2-1)(m^2+1)+5m=m(m-1)(m+1)(m^2- 4+5)+5m=$$
$$=m(m-1)(m+1)(m^2- 4)+m(m-1)(m+1)\cdot5+5m=m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)+5m(m^2-1+1)=$$
$$=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)+5m^3/$$

Произведение $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$ делится на 5, так как состоит из 5 последовательных целых чисел (одно из которых обязательно кратно 5). Очевидно, что $5m^3$ также делится на 5. Значит, и вся сумма на 5. Доказали, что исходное выражение делится на 5.

<u>Свойства квадрата целого числа</u>

1. **Точный квадрат целого числа не может оканчиваться цифрами 2, 3, 7, 8, а также нечётным количеством нулей.**
2. **Квадрат натурального числа либо делится на 4, либо при делении на 8 даёт остаток 1.**
   Доказательство:
   Если а – число чётное, то есть а=2к, то $a^2=(2k)^2=4k^2$ – делится на 4.
   Если а – число нечётное, то есть а=2к+1, то то $a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4к(к+1)+1$ – при делении на 8 даёт остаток 1.
3. **Квадрат натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 даёт остаток 1.**
   Доказательство:
   Если число а кратно 3, значит а=3к, тогда то $a^2=(3k)^2=9k^2$ - делится на 9.
   Если же число а не кратно 3, то оно имеет вид а=3к±1, тогда то
   $a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3k(3k\pm2)+1$ – при делении на 3 даёт остаток 1.

1. Сумма двух целых чисел равна 101, а разность их квадратов – простое число. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим искомые числа через а и b. Тогда $a^2- b^2=p$, где р - простое число, т.е.

(a-b)(a+b)=p . Поскольку a+b=101 , то 101(a-b)=p. Отсюда следует, что р делится на 101, но р - простое, значит, р=101 . Имеем: a-b=1, отсюда a=b+1. Так как a- b=101, находим, что a=51 и b=50.

Ответ: 51 и 50.

2. Могут ли числа 1234567897 и 1234567892 быть квадратами каких-либо целых чисел?

Решение. Данные числа не могут являться квадратами целых чисел из-за своих последних цифр 7 и 2. Дело в том, что при возведении в квадрат целого числа, последняя цифра может быть равной 1, 4, 9, 6, 5, 0. *Ответ*: нет.

3. Является ли число 123321123321 квадратом какого-либо целого числа?

Решение. Предположим, что $123321123321=k^2$, где k - некоторое целое число. Заметим, что число 123321123321 делится на 3, так как сумма его цифр равна 24, а 24 делится на 3. Следовательно, число k^{22} делится на 3. Тогда и число k должно делится на 3. Докажем этот факт.

Если число k при делении на 3 дает остаток 1, т.е. k=3s+1, то $k^2=(3s+1)^2=9s^2+6s+1$. Ясно, что это выражение на 3 делится с остатком 1.

Если число k при делении на 3 дает остаток 2, т.е. k=3sт.е. $k^2=9s^2$. Но тогда и число k^2 делится на 9. Но из равенства $123321123321=k^2$ следует, что число 123321123321 должно делитсяна 9. Получили противоречие, т.к. сумма цифр данного числа равна 24 и по признаку делимости на 9 (24 не 4 делится на 9 без остатка) имеем, что число 123321123321 не делится на 9 без остатка. Следовательно, наше предположение о существовании целого числа k , такого что $123321123321=k^2$, ошибочно.

Ответ: нет.

4. Найти все натуральные *n*, при которых число n!+57 **является точным квадратом.**

Решение:

Если n=1, то n!+57=1+57=58 – не является точным квадратом.

Если n=2, то n!+57=2+57=59 – не является точным квадратом.

Если n=3, то n!+57=6+57=63 – не является точным квадратом.

Если n=4, то $n!+57=24+57=81=9^2$, значит, при n=4 число n!+57 является точным квадратом числа.

Если n≥5 , то n! оканчивается 0, тогда n!+57 оканчивается 7, но по свойству (1) квадрат целого числа не может оканчиваться цифрой 7. Значит, других натуральных чисел n, удовлетворяющих данному условию, не существует. **Ответ:** при n=4.

Эта задача могла быть сформулирована иначе:

5. Решить в целых числах уравнение $n!+57=k^2$.

Способ решения тот же. Только надо помнить, что по определению n! число может быть только натуральным, а целым - только k. *Ответ:* n=4, k=±9..

6. Решить в целых числах уравнение: $n!+5n+13=k^2$.

Решение: Так как n! – произведение первых n натуральных чисел, значит, n∈N , а целым может быть только k.

Если n=1, то n!+5n+13=19,тогда $k^2=19$, k - не целое.

Если n=2, то n!+5n+13=25,тогда $k^2=25$, k=±5 - целое.

Если n=3, то n!+5n+13=34, тогда $k^2=34$, k - не целое.

Если n=4, то n!+5n+13=57, тогда $k^2=57$, k - не целое.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если } n \ge 5, \text{ то } n! \text{ оканчивается } 0,\\ \quad 5n \text{ оканчивается } 0 \text{ или } 5,\\ \quad 13 \text{ оканчивается } 3.\end{array}\right\} \text{Значит, } n! + 5n + 13 \text{ оканчивается 3 или 8.}$$

Но по свойству (1) квадрат целого числа не может оканчиваться ни 3, ни 8, значит, других целых решений уравнение не имеет. *Ответ:* n=2, k=±5. .

7. Решить уравнение в целых числах: $n!+6^n+11=k^2$.

Решение:

При решении уравнения напомним, что n∈N, k∈Z., и опираемся на свойство (1) квадрата целого числа.

Если n≥5, то n! окончивается 0, 6^n окончивается 6.

Значит, $n!+6^n+11$ оканчивается 7, но тогда и k^2 оканчивается 7. Но квадрат целого числа не может оканчиваться 7, значит, n≥5 целых решений нет.

Значит, решения уравнения следует искать при n= 1, 2, 3, 4.

Если n=1, то $n!+6^n+11=18$, тогда $k^2=18$, k - не целое.

Если n=2, то $n!+6^n+11=49$,тогда $k^2=49$, k=±7 - целое.

Если n=3, то $n!+6^n+11=233$, тогда $k^2=233$, k - не целое.

Если n=4, то $n!+6^n+11=1331$, тогда $k^2=1331$, k - не целое.

Ответ: n=2, k=±5.

8. Решить уравнение в целых числах: $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$.

Решение:

Если x=1, то $1! = y^2$, тогда y=±1.

Если x=2, то $1!+2! = y^2$, $y^2=3$, y - не целое.

Если x=3, то $1!+2!+3! = y^2$, $y^2=3$, y=±3.

Если x=4, то $1!+2!+3!+4! = y^2$, $y^2=33$, y - не целое.

Если x≥5, то 1!+2!+3!+4!+…+x! оканчивается цифрой 3, но квадрат целого числа не может оканчиваться 3.

Значит, при x≥5 уравнение не имеет целых решений.

Ответ: 1) x=1, y=±1, 2) x=3, y=±3.

9. Доказать, что уравнение $3x^2+1=5y$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство:

$3x^2+1=5y$, значит $y=(3x^2+1)\backslash 5$, тогда y будет целым, если $3x^2+1$ делится на 5, а это возможно, если $3x^2+1$ оканчивается 0 или 5,

$$\left[\begin{array}{l}3x^2+1=\cdots 0,\\ 3x^2+1=\cdots 5,\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}3x^2=\cdots 9,\\ 3x^2=\cdots 4,\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x^2=\cdots 3,\\ x^2=\cdots 8.\end{array}\right.$$

Но квадрат целого числа не может оканчиваться ни цифрой 3, ни цифрой 8.

Значит, уравнение не имеет целых решений. Что и требовалось доказать.

10. Решить в целых числах уравнение: $m^4 - 2n^2=1$.

Решение:

$$m^4-2n^2=1, \Leftrightarrow m^4-1=2n^2, \Leftrightarrow (m^2-1)(m^2+1)=2n^2, \Leftrightarrow (m-1)(m+1)(m^2+1)=2n^2$$

1) Если m – число чётное, то $(m-1),(m+1),(m^2+1)$ – числа нечётные и их произведение $(m-1)(m+1)(m^2+1)$ – тоже число нечётное, но правая часть уравнения $2n^2$ – чётное число. Значит, при чётном m уравнение не имеет решений.

2) Если m – число нечётное, то $(m-1),(m+1),(m^2+1)$ – числа чётные, причем, $(m-1)$ и $(m+1)$ – два последовательных чётных числа, одно из которых кратно 2, а другое – 4.

Тогда $(m-1)(m+1)(m^2+1) \vdots 16$, значит, $n^2 \vdots 8$, но квадрат целого числа делится на 4 или при делении на 8 даёт остаток 1. А $n^2 \vdots 8$ лишь в единственном случае, если n=0. При n=0 уравнение примет вид:

$$m^4-2\cdot 0=1, \Leftrightarrow m^4=1, \Leftrightarrow m=\pm 1.$$ *Ответ:* n=0, m=±1.

11. Решить в целых числах уравнение: $1+2^k+2^{2k+1}=n^2$.

Решение:

$$1+2^k+2^{2k+1}=n^2, \Leftrightarrow 2^k+2^{2k+1}=n^2-1, \Leftrightarrow 2^k+2^{2k+1}=(n-1)(n+1)$$

1) Если n – число четное, то $(n-1),(n+1)$ – числа нечётные, значит, 2^k+2^{2k+1} – тоже нечетное число, а это возможно лишь тогда, когда k=0,

т.е. $1+2^0+2^{2\cdot 0+1}=n^2, \Leftrightarrow 1+1+2=n^2, \Leftrightarrow n^2=4, \Leftrightarrow n=\pm 2$. При всех других чётных k уравнение целых решений не имеет.

2) Если n – число нечётное, то – два последовательных чётных числа, одно из которых кратно

2, а другое – 4. Тогда их произведение $(n-1)(n+1) \vdots 8$. Значит, и левая часть уравнения $2^k + 2^{2k+1} = 2^k + 2 \cdot 2^k \cdot 2^k = 2^k(2 \cdot 2^k + 1) \vdots 8$, но $(2 \cdot 2^k + 1)$ – число нечётное, значит, только $2^k \vdots 8$. Это возможно, если k≥3. При $k = 3,\ n^2 = 137, n \notin Z$.

При $k = 4,\ 1 + 2^4 + 2^{2\cdot 4+1} = n^2$,

$1 + 16 + 512 = n^2, \Leftrightarrow n^2 = 529;\ n = \pm 23$.

Если же k>4 , то $2^k > 2^4$, значит, $2^k(2 \cdot 2^k + 1) \vdots 16$, а правая часть уравнения $(n-1)(n+1) \vdots 8$, значит, других решений уравнение не имеет.

Ответ: 1) $k = 0; n = \pm 2;$ 2) $k = 4; n = \pm 2$

12. Доказать, что число, оканчивающееся двумя одинаковыми цифрами, отличными от 0 и 4, не может быть точным квадратом.

Доказательство:

Так как квадрат любого числа может оканчиваться цифрами: 0; 1; 4; 5; 6; 9, то кроме 0 и 4 последними цифрами могут быть: 11; 55; 66; 99.

Если $A^2 = \cdots 55$, то A кратно 5, тогда $A^2 = \cdots 25$, и не может оканчиваться цифрами 55.

Если $A^2 = \cdots 66$, то A - число чётное, тогда A^2 должно делиться на 4, но 66 не кратно 4.

$\left.\begin{matrix} A^2 = \cdots 11 \\ A^2 = \cdots 99 \end{matrix}\right\}$ A – число нечётное, при делении на 8 (а значит и при делении на 4) A^2 даёт остаток 1,

но $\left.\begin{matrix} A^2 = \cdots 11 \\ A^2 = \cdots 99 \end{matrix}\right\}$ - при делении на 4 остаток равен 3.

Значит, не существует таких чисел A , что A^2 оканчивается 55, 66, 11 или 99.

Что и требовалось доказать.

13. Доказать, что тысячезначное число, все цифры которого пятёрки, за исключением, быть может, одной, не является точным квадратом.

Доказательство: а) Если число оканчивается 5, то предпоследняя цифра может быть только 2, тогда 55….525 – число нечётное, оно не кратно 4, значит, при делении на 8 должно дать в остатке 1, но

525=8·65+5. Значит, число не может быть точным квадратом.

б) Если последняя цифра не 5, то это может быть 0; 1; 4; 6; 9, тогда

$k^2 = 55..50$ – не может быть, т.к. k^2 должно оканчиваться чётным числом нулей.

$k^2 = 55..51$ – не может быть, т.к. k^2 при делении на 8 дает в остатке 1, но здесь k^2=8·68+7.

$k^2 = 55..54$ – чётно, но не кратно 4, т.к. 54 не делится на 4.

$k^2 = 55..59$ – нечётное, но при делении на 8 даёт остаток 7, а не 1.

$k^2 = 55..56$ – чётно и делится нацело на 4, но не всякое чётное число, кратное 4, является точным квадратом. Проверим, выполняется ли свойство (3) квадрата целого числа.

$\underbrace{55\ldots55}_{999}6$ сумма цифр $1000 \cdot 5 + 1 = 5001$ не делится на 9, а при делении на 3 в остатке 0.

Таким образом, ни одно из перечисленных чисел не может быть точным квадратом. Что и требовалось доказать.

14. Из цифр 2, 3, …, 9 составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

15. Решите систему уравнений: [x]y=1000. [y]x=1996

Решение. Легко видеть, что $[x] \neq 0$; $[y] \neq 0$.

Рассмотрим два случая:

а) $x \geq 1 \Rightarrow$ y=1000 / [1000], [y]=1996 / x.

Мы знаем: $[y] \leq y$ и $x < x+1 \Rightarrow$ [1996] / [x]+1 < 1000 / [x] $\Rightarrow [x] = 1$, y=1000, x=499/250 .

б) $x < 0 \Rightarrow$ [x]=1000 / y, x=1996 / [y].

Мы знаем: $y < [y] + 1$ и $[x] \leq x$;

а) если $[y] \neq -1 \Rightarrow$ 1000 / [y]+1 < 1000 / y =[x] ≤ x=1996 / [y] ⇒ [y] > 1996/996 >- 3 ⇒ [y] -2 ⇒

⇒ x=[x] = - 998; y= - 1000 / 998 = - 500 / 499;

б) если $[y] = -1 \Rightarrow$ x= [x]=-1996 ⇒ $y = -1000 / 1996 = -250 / 499$.

Ответ: (499 / 250 ; 1000) ; (- 998; -500 / 499); (-1996; -250 /499) .

16. Пусть a, b, c – целые числа, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите неравенство: $b(a + c) \leq \sqrt{2} / 2$.

Решение. 1=, $a^2 + b^2 + c^2$=, $a^2 + b^2 / 2 + b^2 / 2 + c^2$. Так как (x+y) / 2 ≥xy, если x>0 и y>0 ⇒

$\Rightarrow a^2 + b^2 / 2 \geq 2\sqrt{a2b2/2} = \sqrt{2}\, ab;\ \ b^2 / 2 + c^2 \geq \sqrt{2}\, bc \Rightarrow 1 \geq \sqrt{2}\, ab + \sqrt{2}\, bc = \sqrt{2}\, b(a+c) \leq \sqrt{2} / 2.$

17. Сумма четырех натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

Решение. Пусть $1995 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, где $m_1 \le m_2 \le m_3 \le m_4$ – натуральные числа. Заметим, что $m_4 > 1995 / 4 > 498$. Если НОК $(m_1, m_2, m_3, m_4) \ne m_4 \Rightarrow$ НОК $\ge 2m_4$, (НОК : m) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ НОК $\ge 2 \cdot 499 = 998$. Если НОК $= m_4 \Rightarrow$ то $m_1 \le m_4 / 2$ ($m_4 : m_1 \Rightarrow$ если $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1995 = 4m_4 \Rightarrow 1995 : 4$ − противоречие) $\Rightarrow m_1 \le m_4 / 2$, $m_2 \le {}_4m$, $m_3 \le m_4 \Rightarrow m_4 / 2 + m_4 + m_4 + m_4 \ge 1995$
$\Rightarrow m_4 \ge 570$. Следовательно, НОК ≥ 570.
Можно видеть: $1995 = 285 + 570 + 570 + 570 \Rightarrow$ НОК = 570. Ответ: НОК = 570.

18. В некотором числе переставили цифры, и оно уменьшилось в три раза. Докажите, что это число делится на 27.

Решение. Сумма цифр этого числа делится на 3, значит, и число в три раза меньшее делится тоже на 3. Поэтому исходное число делится на 9, значит, и сумма цифр исходного числа делится на 9. Поэтому второе число тоже делится на 9, т. е. исходное делится на 27.

19. Найдите все натуральные числа a, для которых число $a^3 + 1$ – степень тройки.

Решение. Пусть $a^31=3k$ и $a^31=(a1)(a^2-a1) \Rightarrow a+1=3^m$, $a^2-a+1=3^n$, $m \in N$, $n \in N$, следовательно, a не делится на 3. Далее, $3a=(a+1)^2-(a^2-a+1)=3^{2m}-3n \Rightarrow a=3^{2m-1}-3^{n-1}$, что возможно только, если
$n-1=0 \Rightarrow a^2-a+1=3 \Rightarrow a=2$.

20. Найдите все простые числа p, q такие, что $p + q = (p-q)^3$.

Решение. Пусть $p-q=n \Rightarrow p+q=n^3 \Rightarrow q=(n^3-n)/2=(n-1)n(n+1)/2 \Rightarrow$ среди трех последовательных чисел одно обязательно делится на три, поэтому q делится на 3 $\Rightarrow n=2 \Rightarrow p=(n^3+n) / 2 = 5 \Rightarrow p=5, q=3$.